МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ, МИНИСТЕРСТВО НАУКИ, ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ И ИННОВАЦИЙ КЫРГЫЗСКОЙ РЕСПУБЛИКИ

МОО ВО Кыргызско-Российский Славянский университет
имени первого Президента Российской Федерации Б.Н. Ельцина

УТВЕРЖДАЮ

Директор
(должность)
Лоцев Г.В
(ФИО)
3 сентября____2026 г.

Аналитическая механика

рабочая программа дисциплины (модуля)

Закреплена за кафедрой **Высшая школа Природопользования, мехатроники и транспорта**

Учебный план Направление 15.03.03 - РФ, 650500 - КР Прикладная механика
Профиль "Вычислительная механика и компьютерный инжиниринг"

Квалификация **бакалавр**
Форма обучения **очная**

Общая трудоемкость **3 ЗЕТ**
Часов по учебному плану 108
в том числе:
аудиторные занятия 36
самостоятельная работа 40

Виды контроля в семестрах:
экзамен 5

Распределение часов дисциплины по семестрам

Семестр (<Курс>.<Семестр на курсе>)	**5 (3.1)**		Итого	
Недель	17 2/6			
Вид занятий	УП	РП	УП	РП
Лекции	18	18	18	18
Практические	18	18	18	18
Контактная работа в период экзаменационной сессии	0,3	0,3	0,3	0,3
В том числе инт.	2	2	2	2
Итого ауд.	36	36	36	36
Контактная работа	36,3	36,3	36,3	36,3
Сам. работа	40	40	40	40
Часы на контроль	31,7	31,7	31,7	31,7
Итого	108	108	108	108

Программу составил(и):
к.ф.-м.н., Герман Константин Анатольевич

к.т.н, Джаманкулов Азамат Кенешбекович

Рецензент(ы):
к.ф.-м.н., Комарцов Никита Михайлович

д.т.н, Муслимов Аннас Поясович

Согласовано РОП:
к.ф.-м.н., Герман Константин Анатольевич

Рабочая программа дисциплины
Аналитическая механика

разработана в соответствии с ФГОС 3++:

Федеральный государственный образовательный стандарт высшего образования - бакалавриат по направлению подготовки 15.03.03 Прикладная механика (приказ Минобрнауки России от 09.08.2021 г. № 729)

составлена на основании учебного плана:

Направление 15.03.03 - РФ, 650500 - КР Прикладная механика
Профиль "Вычислительная механика и компьютерный инжиниринг"
утвержденного учёным советом вуза от 26.06.2026 протокол № 11.

Рабочая программа одобрена на заседании **Высшей школы Природопользования, мехатроники и транспорта**

Протокол от 02.09.2026 г. № 1
Срок действия программы: 2026-2032 уч.г.
Руководитель подразделения: Алсеитов Мирлан Тилегенович

ЛИСТ РЕГИСТРАЦИИ ИЗМЕНЕНИЙ
к рабочей программе дисциплины (модуля)

Аналитическая механика

№ п/п	Основание внесения изменения	Раздел/ пункт	Содержание изменения
1.			
2.			
3.			
4.			
5.			

1. ЦЕЛИ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ	
1.1	Целью освоения дисциплины «Аналитическая механика» является изучение основных положений аналитической механики, овладение методами составления уравнений движения механических систем, основанными на принципах Даламбера, Гамильтона-Остроградского, уравнениях Лагранжа, изучение равновесия механических систем и их малых колебаний относительно положения равновесия.

2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ООП	
Цикл (раздел) ООП:	Б1.О.3
2.1	**Требования к предварительной подготовке обучающегося:**
2.1.1	Б1.О.2.01. Введение в высшую математику
2.1.2	Б1.О.2.04. Дифференциальные уравнения
2.1.3	Б1.О.2.03. Линейная алгебра и аналитическая геометрия
2.1.4	Б1.О.3.02. Теоретическая механика
2.1.5	Б1.О.3.03. Сопротивление материалов
2.1.6	Б1.О.2.02. Математический анализ
2.2	**Дисциплины и практики, для которых освоение данной дисциплины (модуля) необходимо как предшествующее:**
2.2.1	Б1.В.1.01. Теория упругости
2.2.2	Б2.О.02(Пд). Преддипломная практика
2.2.3	Б3.О.02. Подготовка к сдаче и сдача государственного экзамена
2.2.4	Б1.В.1.ДВ.04.01. Экспериментальная механика деформируемого твердого тела
2.2.5	Б1.В.1.02. Основы теории пластичности и ползучести
2.2.6	Б1.О.3.04. Строительная механика машин

3. КОМПЕТЕНЦИИ ОБУЧАЮЩЕГОСЯ, ФОРМИРУЕМЫЕ В РЕЗУЛЬТАТЕ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)	
ОПК-1: Способен применять естественнонаучные и общеинженерные знания, методы математического анализа и моделирования в профессиональной деятельности;	
Знать:	
Уровень 1	Способен применять стратегию работы на основе совместного обсуждения целей и направлений деятельности для реализации проблем естественнонаучных и общеинженерных знанийСпособен применять стратегию работы на основе совместного обсуждения целей и направлений деятельности для реализации проблем естественнонаучных и общеинженерных знаний
Уровень 2	
Уровень 3	
Уметь:	
Уровень 1	Способен применять стратегию работы на основе совместного обсуждения целей и направлений деятельности для реализации методов математического анализа и моделирования в профессиональной деятельности
Уровень 2	
Уровень 3	
Владеть:	
Уровень 1	Способен реализовать и корректировать и применять стратегию использования естественнонаучных и общеинженерных знаний, учитывая методы математического анализа и моделирования в профессиональной деятельности.
Уровень 2	
Уровень 3	

В результате освоения дисциплины обучающийся должен

3.1	**Знать:**
3.1.1	основные принципы составления уравнений движения, типы колебаний механических систем и их особенности, методы решения уравнений движения
3.2	**Уметь:**
3.2.1	выявлять естественно-научную сущность проблем, возникающих в ходе профессиональной деятельности; составлять и решать уравнения движения линейных и нелинейных систем
3.3	**Владеть:**

3.3.1	пользоваться физико-математическим аппаратом для составления и решения уравнений движения механических систем

4. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)								
Код занятия	**Наименование разделов и тем /вид занятия/**	**Семестр / Курс**	**Часов**	**Компетен-ции**	**Литература**	**Инте ракт.**	**Пр. подг.**	**Примечание**
	Раздел 1. Связи и общие принципы аналитической механики							
1.1	Связи, обобщённые координаты и возможные перемещения: Механическая система и число степеней свободы; переход от координат отдельных тел к независимым параметрам системы. Классификация связей: геометрические и кинематические, голономные и неголономные, стационарные и нестационарные. Выбор обобщённых координат для маятников, ползунных механизмов и систем связанных твёрдых тел. Выражение положений и скоростей точек через обобщённые координаты и обобщённые скорости. Возможные перемещения и их отличие от действительных перемещений; условия совместимости со связями. Идеальные связи и работа их реакций на возможных перемещениях. /Лек/	5	4	ОПК-1	Л1.1 Л1.2Л2.1			
1.2	Классификация связей, определение числа степеней свободы и выбор обобщённых координат /Пр/	5	4	ОПК-1	Л1.1 Л1.2Л2.1			
1.3	Принцип возможных перемещений и равновесие механических систем: Возможная работа активных сил и моментов; вычисление обобщённых сил. Принцип возможных перемещений для систем с идеальными двусторонними связями. Условия равновесия в независимых обобщённых координатах. Определение обобщённых сил потенциального поля через производные потенциальной энергии. Нахождение положений равновесия рычажного механизма и системы с упругими элементами. /Лек/	5	2	ОПК-1	Л1.1 Л1.2Л2.1			
1.4	Вычисление обобщённых сил и определение равновесия методом возможных перемещений /Пр/	5	2	ОПК-1	Л1.1 Л1.2Л2.1			

1.5	Принцип Даламбера — Лагранжа и общее уравнение динамики: Силы инерции материальных точек и принцип Даламбера. Приведение сил инерции твёрдого тела при поступательном движении и вращении вокруг неподвижной оси. Объединение принципа Даламбера с принципом возможных перемещений. Общее уравнение динамики системы с идеальными связями и исключение неизвестных реакций. Получение уравнения движения механизма с одной степенью свободы; сопоставление с методом Ньютона — Эйлера. /Лек/	5	4	ОПК-1	Л1.1 Л1.2Л2.1			
1.6	Составление уравнения движения механизма с использованием принципа Даламбера — Лагранжа /Пр/	5	4	ОПК-1	Л1.1 Л1.2Л2.1			
1.7	Классификация связей выбранного механизма; определение независимых координат; выражение положений и скоростей его звеньев. Вычисление возможной работы и обобщённых сил; определение равновесия двумя способами — через работу сил и потенциальную энергию. Вывод уравнения движения системы с одной степенью свободы; проверка результата методом Ньютона — Эйлера. /Ср/	5	20	ОПК-1	Л1.1 Л1.2Л2.1			
	Раздел 2. Уравнения движения в обобщённых координатах							
2.1	Уравнения Лагранжа второго рода: Кинетическая энергия системы как функция обобщённых координат и скоростей. Получение уравнений Лагранжа второго рода из общего уравнения динамики. Последовательность составления уравнений: выбор координат, определение энергий и обобщённых сил. Функция Лагранжа и запись уравнений для систем с потенциальными силами. Составление связанных уравнений движения двухмассовой системы или двойного маятника. Матричная запись уравнений движения и физический смысл матрицы инерции. /Лек/	5	4	ОПК-1	Л1.1 Л1.2Л2.1			

2.2	Составление уравнений Лагранжа для механической системы с двумя степенями свободы /Пр/	5	4	ОПК-1	Л1.1 Л1.2Л2.1			
2.3	Неконсервативные силы и первые интегралы движения: Учёт внешних сил и приводных моментов в уравнениях Лагранжа. Линейное вязкое сопротивление и диссипативная функция Рэлея. Циклические координаты, обобщённые импульсы и соответствующие первые интегралы. Интеграл энергии и условия его существования; особенности систем с явной зависимостью от времени. Баланс механической энергии при наличии сопротивления и внешнего воздействия. Применение первых интегралов для сокращения числа уравнений и проверки решения. /Лек/	5	4	ОПК-1	Л1.1 Л1.2Л2.1			
2.4	Учёт вязкого сопротивления и внешнего воздействия; исследование энергетического баланса /Пр/	5	4	ОПК-1	Л1.1 Л1.2Л2.1	2		
2.5	Определение кинетической и потенциальной энергий; получение уравнений движения; проверка размерностей и предельных случаев. Диссипация и первые интегралы. Введение вязкого сопротивления; выявление сохраняющихся величин при отсутствии сопротивления; составление уравнения энергетического баланса. /Ср/	5	20	ОПК-1	Л1.1 Л1.2Л2.1			
2.6	Консультации и проведение экзамена /КрЭк/	5	0,3	ОПК-1	Л1.1 Л1.2Л2.1			

5. ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

5.1. Контрольные вопросы и задания

1. Контрольные вопросы для текущего контроля

Тема 1. Связи, обобщённые координаты и возможные перемещения

1. Как классифицируются связи механической системы? Приведите примеры голономных и неголономных связей.
2. Как определить число степеней свободы системы при наличии независимых голономных связей?
3. Каким требованиям должен удовлетворять выбор независимых обобщённых координат?
4. Как выразить радиус-векторы и скорости точек системы через обобщённые координаты?
5. Чем возможное перемещение отличается от действительного? Как учитывается время при вычислении возможного перемещения?
6. Какие связи называются идеальными? Всегда ли отсутствие трения означает идеальность связи?

Тема 2. Принцип возможных перемещений и равновесие

1. Как вычисляется возможная работа силы и момента силы?
2. Как определяются обобщённые силы? От чего зависит их размерность?
3. Сформулируйте принцип возможных перемещений и укажите условия его применения.
4. Почему реакции идеальных связей исключаются из уравнения возможных работ?
5. Как записываются условия равновесия в независимых обобщённых координатах?
6. Как связаны обобщённые потенциальные силы с потенциальной энергией системы?

Тема 3. Принцип Даламбера — Лагранжа
1. Как определяется сила инерции материальной точки?
2. Как записывается принцип Даламбера для материальной точки и системы точек?
3. Как учитываются силы инерции твёрдого тела при поступательном движении и вращении вокруг неподвижной оси?
4. Сформулируйте принцип Даламбера — Лагранжа.
5. Как получить уравнение движения системы с одной степенью свободы из общего уравнения динамики?
6. В каких случаях необходимо отдельно определять реакции связей?
Тема 4. Уравнения Лагранжа второго рода
1. Как выразить кинетическую энергию системы через обобщённые скорости?
2. Запишите уравнения Лагранжа второго рода с обобщёнными силами в правой части.
3. Как определяется функция Лагранжа для системы с потенциальными силами?
4. Какова последовательность составления уравнений Лагранжа?
5. Почему число уравнений Лагранжа равно числу независимых обобщённых координат?
6. Каков физический смысл диагональных и недиагональных элементов матрицы инерции?
Тема 5. Неконсервативные силы и первые интегралы
1. Как включаются внешние силы и приводные моменты в уравнения Лагранжа?
2. Что описывает диссипативная функция Рэлея? Как через неё определяются силы вязкого сопротивления?
3. Какая координата называется циклической?
4. При каких условиях сохраняется обобщённый импульс, соответствующий циклической координате?
5. При каких условиях существует интеграл энергии? Когда энергетическая функция совпадает с полной механической энергией?
6. Как записывается энергетический баланс системы с вязким сопротивлением и внешним воздействием?
Тема 6. Принцип Гамильтона — Остроградского
1. Как определяется действие механической системы?
2. Что понимается под вариацией траектории?
3. Какие условия накладываются на вариации координат на концах временного интервала?
4. Сформулируйте принцип Гамильтона — Остроградского для консервативной голономной системы.
5. Как из условия стационарности действия выводятся уравнения Лагранжа?
6. Почему стационарное значение действия не обязательно является минимальным?
7. Как учитывается виртуальная работа непотенциальных сил в расширенной вариационной формулировке?
Тема 7. Канонические уравнения и численное решение
1. Как определяются обобщённые импульсы?
2. При каком условии возможен переход от скоростей к импульсам?
3. Как строится функция Гамильтона посредством преобразования Лежандра?
4. Запишите канонические уравнения Гамильтона.
5. Как привести уравнения движения второго порядка к системе первого порядка?
6. Какие сведения о движении системы можно получить по фазовой траектории?
7. Как проверить численное решение по энергетическому балансу и изменению точности интегрирования?
Тема 8. Равновесие и устойчивость
1. Как определяются положения равновесия консервативной системы?
2. Что означает устойчивость положения равновесия относительно малых возмущений?
3. Сформулируйте теорему Лагранжа — Дирихле.
4. Как используется вторая вариация потенциальной энергии при исследовании устойчивости?
5. Как проверить положительную определённость матрицы вторых производных потенциальной энергии?
6. Почему вырожденная квадратичная форма может потребовать исследования членов более высокого порядка?
Тема 9. Малые колебания
1. Какие допущения принимаются при линеаризации уравнений движения около равновесия?
2. Как строятся матрицы масс и жёсткости?
3. Как выводится частотное уравнение системы?
4. Что представляют собой собственная частота и собственная форма колебаний?
5. В каком смысле собственные формы консервативной системы ортогональны?
6. Как вводятся нормальные координаты и используются начальные условия?
7. Как вязкое сопротивление и гармоническое воздействие изменяют колебательное движение?
2. Типовые задания для текущего контроля
Задание 1. Выбор обобщённых координат
Двойной плоский маятник состоит из двух невесомых стержней длиной \(l_1\) и \(l_2\), соединённых идеальными шарнирами. Точечные массы \(m_1\) и \(m_2\) находятся соответственно в промежуточном шарнире и на конце второго стержня. Верхний шарнир неподвижен.
Определить число степеней свободы, классифицировать связи, выбрать обобщённые координаты. Выразить декартовы координаты, скорости и возможные перемещения обеих масс.
Задание 2. Равновесие методом возможных перемещений
Невесомый горизонтальный рычаг может вращаться вокруг неподвижного шарнира. На расстоянии \(a=0{,}20\) м слева от шарнира действует вертикальная сила \(F=100\) Н, направленная вниз. На расстоянии \(b=0{,}50\) м справа приложена вертикальная сила \(P\), также направленная вниз.
Используя принцип возможных перемещений, определить силу \(P\), обеспечивающую равновесие. Проверить результат уравнением моментов.
Задание 3. Принцип Даламбера — Лагранжа
Грузы массами \(m_1=3\) кг и \(m_2=5\) кг соединены невесомой нерастяжимой нитью, перекинутой через неподвижный

блок радиусом $R=0{,}10$ м и моментом инерции $J=0{,}02$ кг·м². Нить не проскальзывает по блоку; трением в оси пренебречь.
Выбрать обобщённую координату, составить уравнение движения и определить ускорение грузов. Принять $g=9{,}81$ м/с².
Задание 4. Уравнения Лагранжа для двухмассовой системы
Две массы m_1 и m_2 движутся без трения по горизонтальной направляющей. Первая масса соединена с левой неподвижной опорой пружиной жёсткостью k_1, массы соединены пружиной k_2, вторая масса соединена с правой опорой пружиной k_3. Координаты x_1 и x_2 отсчитываются от положения равновесия.
Записать кинетическую и потенциальную энергии. Получить уравнения Лагранжа, построить матрицы масс и жёсткости, объяснить смысл членов, связывающих оба уравнения.
Задание 5. Вязкое сопротивление и энергетический баланс
Для системы «масса — пружина — демпфер» заданы:
$m=2$ кг, $k=50$ Н/м, $c=4$ Н·с/м. Внешняя сила отсутствует.
Составить диссипативную функцию и уравнение движения. Получить выражение для производной полной механической энергии по времени. Определить характер свободного движения и объяснить изменение энергии.
Задание 6. Вариационный вывод уравнения движения
Для математического маятника длиной l и массой m угол φ отсчитывается от нижней вертикали.
Записать функцию Лагранжа и действие. При фиксированных начальном и конечном положениях вычислить первую вариацию действия и вывести нелинейное уравнение движения. Получить его линейное приближение для малых углов.
Задание 7. Каноническая и численная модели
Для гармонического осциллятора с массой $m=1$ кг и жёсткостью $k=25$ Н/м определить обобщённый импульс и функцию Гамильтона, записать канонические уравнения.
При условиях $x(0)=0{,}10$ м, $\dot{x}(0)=0$ выполнить численное интегрирование на интервале 0–10 с. Построить график перемещения и фазовую траекторию, сравнить решение с аналитическим, оценить изменение энергии.
Задание 8. Исследование устойчивости равновесия
Потенциальная энергия системы с одной координатой имеет вид
$$
\Pi(q)=\frac{a}{2}q^2+\frac{b}{4}q^4,\qquad b>0.
$$
Найти положения равновесия и исследовать их устойчивость при $a>0$, $a=0$ и $a<0$. Объяснить, почему при $a=0$ недостаточно анализа только второй производной.
Задание 9. Собственные частоты и формы
Для системы из задания 4 принять:
$m_1=m_2=2$ кг, $k_1=k_2=k_3=200$ Н/м.
Составить частотное уравнение, найти собственные круговые частоты и формы колебаний. Проверить ортогональность форм относительно матрицы масс. Определить свободное движение при
$x_1(0)=0{,}01$ м, $x_2(0)=0$, $\dot{x}_1(0)=\dot{x}_2(0)=0$.
3. Задания для письменных контрольных работ
Контрольная работа 1. Общие принципы и уравнения движения
1. Классифицировать связи заданного механизма, определить число степеней свободы и выбрать координаты.
2. Вычислить обобщённые силы и получить условие равновесия методом возможных перемещений.
3. Составить уравнение движения системы с одной степенью свободы по принципу Даламбера — Лагранжа.
4. Получить уравнения Лагранжа для системы с двумя степенями свободы.
Варианты формируются на основе заданий 1–4 с изменением параметров и расчётных схем.
Контрольная работа 2. Энергия, устойчивость и колебания
1. Составить уравнение движения с вязким сопротивлением и записать энергетический баланс.
2. Построить функцию Гамильтона простой консервативной системы.
3. Найти положения равновесия и исследовать их устойчивость.
4. Определить собственные частоты и формы колебаний двухмассовой системы.
Варианты формируются на основе заданий 5, 7–9.
4. Вопросы для защиты расчётных и компьютерных заданий
1. Почему выбраны именно эти обобщённые координаты?
2. Какие допущения приняты и как они ограничивают применимость модели?
3. Как учтены кинетическая энергия, потенциальная энергия и внешние воздействия?
4. Почему реакции связей отсутствуют или присутствуют в полученных уравнениях?
5. Как проверены размерности и знаки отдельных членов?
6. Как изменяется модель при исключении одной массы, пружины или демпфера?
7. Какие начальные условия использованы и каков их физический смысл?
8. Как проверены точность численного решения и энергетический баланс?
9. Соответствуют ли полученные частоты и формы физическому поведению системы?
10. Какие изменения параметров сильнее всего влияют на результат?
5. Контрольные вопросы для промежуточной аттестации
1. Классификация связей и определение числа степеней свободы механической системы.
2. Обобщённые координаты и скорости. Выражение кинематических характеристик через обобщённые координаты.
3. Возможные перемещения и идеальные связи.
4. Возможная работа и обобщённые силы.
5. Принцип возможных перемещений и условия равновесия.
6. Потенциальная энергия и обобщённые потенциальные силы.

7. Принцип Даламбера и силы инерции.
8. Принцип Даламбера — Лагранжа и общее уравнение динамики.
9. Кинетическая энергия в обобщённых координатах. Матрица инерции.
10. Уравнения Лагранжа второго рода и условия их применения.
11. Функция Лагранжа и уравнения движения консервативной системы.
12. Учёт внешних сил, моментов и вязкого сопротивления.
13. Диссипативная функция Рэлея.
14. Циклические координаты и сохранение обобщённых импульсов.
15. Энергетическая функция, интеграл энергии и баланс механической энергии.
16. Действие и принцип Гамильтона — Остроградского.
17. Вывод уравнений Лагранжа из вариационного принципа.
18. Обобщённые импульсы, преобразование Лежандра и функция Гамильтона.
19. Канонические уравнения Гамильтона.
20. Фазовые траектории и их физическая интерпретация.
21. Приведение уравнений движения к системе первого порядка и проверка численного решения.
22. Равновесие консервативных систем и теорема Лагранжа — Дирихле.
23. Исследование устойчивости по потенциальной энергии. Вырожденные случаи.
24. Линеаризация уравнений движения и матричная модель малых колебаний.
25. Частотное уравнение, собственные частоты и формы колебаний.
26. Ортогональность собственных форм и нормальные координаты.
27. Определение свободного движения по начальным условиям.
28. Учёт вязкого сопротивления и гармонического воздействия в линейной колебательной системе.

6. Типовые расчётные задания для промежуточной аттестации

Задача 1. Равновесие маятника под действием внешней силы

Точечная масса m закреплена на конце невесомого стержня длиной l, подвешенного на неподвижном шарнире. На массу действует постоянная горизонтальная сила F. Угол φ отсчитывается от нижней вертикали.

Определить обобщённую силу, найти положения равновесия и исследовать их устойчивость. Использовать принцип возможных перемещений и потенциальную энергию.

Задача 2. Динамика системы с вращающимся блоком

Для системы двух грузов и блока, описанной в задании 3, получить уравнение движения методом Лагранжа. Определить ускорение и натяжения обеих ветвей нити. Объяснить, почему натяжения могут различаться.

Задача 3. Канонические уравнения математического маятника

Для математического маятника с параметрами m и l построить функцию Лагранжа, определить обобщённый импульс и функцию Гамильтона. Записать канонические уравнения и показать их эквивалентность уравнению Лагранжа.

Задача 4. Устойчивость системы с двумя координатами

Потенциальная энергия задана выражением

$$\Pi(x,y)=\frac{k}{2}(x^2+y^2)+\alpha xy,\qquad k>0.$$

Найти условия на параметр α, при которых положение $x=y=0$ является строгим минимумом потенциальной энергии. Рассмотреть отдельно случаи $|\alpha|=k$ и $|\alpha|>k$. Разграничить наличие минимума и достаточное условие устойчивости по теореме Лагранжа — Дирихле.

Задача 5. Малые колебания двухмассовой системы

Для двух одинаковых масс m, соединённых между собой и с неподвижными опорами тремя одинаковыми пружинами жёсткостью k, получить уравнения движения. Определить собственные частоты, формы и нормальные координаты. Найти движение при заданных начальных перемещениях и нулевых начальных скоростях.

Задача 6. Вынужденные колебания с вязким сопротивлением

Для системы

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=F_0\cos\Omega t,\qquad m>0,\;k>0,\;c>0,$$

получить выражения для амплитуды и фазового сдвига установившегося движения. Объяснить влияние сопротивления на амплитудно-частотную характеристику и определить условие существования её максимума при ненулевой частоте.

Для экзамена предлагается билет из двух теоретических вопросов по разным разделам и одной расчётной задачи. Числовые параметры задач задаются в вариантах билетов; компьютерные задания проверяются в рамках текущего контроля.

5.2. Темы курсовых работ (проектов)

курсовая работа не предусмотрена

5.3. Фонд оценочных средств

1 Паспорт фонда оценочных средств
Параметр Содержание
Дисциплина Аналитическая механика
Направление и профиль 15.03.03 — РФ, 650500 — КР Прикладная механика; Вычислительная механика и компьютерный инжиниринг
Объём 108 часов, 3 зачётные единицы (108 / 36)
Аудиторные занятия 18 часов лекций; 18 часов практических занятий; лабораторные занятия не предусмотрены
Другие виды работы 40 часов самостоятельной работы; 31,7 часа на контроль; 0,3 часа контактной работы в период сессии

Промежуточная аттестация В данном проекте принят экзамен. Отдельное обозначение формы аттестации в приложенной аннотации отсутствует; перед утверждением сверить с учебным планом.
Компетенция ОПК-1: Способен применять естественнонаучные и общеинженерные знания, методы математического анализа и моделирования в профессиональной деятельности.

Проверяемые результаты ниже сформулированы для данного ФОС на основе содержания аннотации. Они не заменяют утверждённые индикаторы ОПК-1: их коды и точные формулировки в исходном материале не представлены.
Темы Проверяемый результат Средства контроля
1–3 Связи и общие принципы Выбирает координаты, определяет обобщённые силы, применяет принципы возможных перемещений и Даламбера — Лагранжа Вопросы 1–15; тест 1–7; задания П1–П3; КР1
4–5 Уравнения Лагранжа Строит модель движения, учитывает внешние силы и сопротивление, проверяет энергетический баланс Вопросы 16–25; тест 8–12; П4–П5; КР1 и КР2
6–7 Вариационные и канонические методы Получает уравнения вариационным методом, строит каноническую модель и проверяет численное решение Вопросы 26–35; тест 13–16; П6–П7; индивидуальное задание; экзамен
8–9 Устойчивость и колебания Исследует равновесие, вычисляет частоты и формы, интерпретирует движение Вопросы 36–45; тест 17–20; П8–П9; КР2; экзамен

2 Порядок контроля и критерии оценивания
Предлагается шкала 100 баллов: текущий контроль — 60, экзамен — 40. Баллы начисляются за качество результата, а не за присутствие. Допуск к экзамену, сроки пересдач и порядок учёта текущих результатов определяются локальными правилами университета; порог допуска данным проектом не устанавливается.
Средство Объём Максимум
Тест 20 заданий × 0,5 балла 10
Практические задания П1–П9 × 2 балла 18
Контрольные работы КР1 и КР2 × 10 баллов 20
Индивидуальное компьютерное задание Отчёт, файл расчёта и защита 12
Экзамен Два вопроса × 10 и задача × 20 40
Итого 100

Устный опрос и задания на исправление ошибок используются для обратной связи и уточнения оценки практического задания, без отдельного начисления баллов. Один результат не оценивается повторно как самостоятельное средство контроля.
2.1 Оценивание практического задания
Критерий Баллы
Корректный выбор координат, допущений и исходных выражений 0–0,5
Правильное уравнение или математическая постановка 0–0,5
Корректный расчёт и представление результата с единицами 0–0,5
Физическая интерпретация, проверка и ответы при защите 0–0,5

По каждому критерию: 0,5 — выполнен полностью; 0,25 — выполнен частично с исправимой ошибкой; 0 — отсутствует либо содержит принципиальную ошибку. Для символического задания вместо численного расчёта оценивается корректность преобразований.
2.2 Оценивание контрольной работы
Каждая работа включает две задачи по 5 баллов. На одну задачу: модель и координаты — 1; исходные энергии, силы или матрицы — 1; вывод и решение — 2; проверка и вывод — 1. За верный метод с арифметической ошибкой сохраняются баллы за корректные этапы; последующая согласованная подстановка ошибочного числа не считается новой независимой ошибкой.
2.3 Оценивание индивидуального задания
Критерий Баллы
Модель, допущения и вывод уравнения 0–3
Воспроизводимость численного расчёта и корректные начальные условия 0–3
Проверка точности и энергетического баланса 0–2
Графики и содержательная интерпретация 0–2
Самостоятельное объяснение модели и результатов при защите 0–2

2.4 Оценивание экзамена
Теоретический вопрос — до 10 баллов: точность понятий и условий применимости — 4; вывод или обоснование основных соотношений — 4; физический смысл и пример — 2. Расчётная задача — до 20 баллов: модель и координаты — 4; энергии, силы или матрицы — 4; вывод уравнений — 5; решение — 5; проверка и интерпретация — 2. Дробные баллы допускаются с шагом 0,5.
Оценка Итоговые баллы Минимальный результат экзамена
Отлично 85–100 32 из 40
Хорошо 70–84,5 24 из 40
Удовлетворительно 60–69,5 16 из 40
Неудовлетворительно Менее 60 либо экзамен менее 16 —

Если сумма баллов соответствует более высокой оценке, но экзаменационный минимум для неё не достигнут, оценка снижается до наивысшей, для которой выполнены оба условия. Например: 90 баллов суммарно и 30 на экзамене —

«хорошо». Эта шкала является предложением и применяется после согласования с локальной системой оценивания.

3 Контрольные вопросы для текущего контроля

Тема 1 Связи и обобщённые координаты

1. Как классифицируются связи? Приведите примеры голономных и неголономных связей.
2. Как определяется число степеней свободы при независимых голономных связях?
3. Каким требованиям отвечает выбор независимых обобщённых координат?
4. Как выразить положения и скорости точек через обобщённые координаты?
5. Чем возможные перемещения отличаются от действительных? Какие связи являются идеальными?

Тема 2 Возможные перемещения и равновесие

6. Как вычисляется возможная работа силы и момента?
7. Как определяются обобщённые силы и их размерность?
8. Сформулируйте принцип возможных перемещений и условия его применения.
9. Почему реакции идеальных связей исключаются из уравнения возможных работ?
10. Как записываются условия равновесия в независимых координатах и через потенциальную энергию?

Тема 3 Принцип Даламбера — Лагранжа

11. Как определяется сила инерции материальной точки?
12. Как учитывается инерция тела при поступательном движении и вращении вокруг неподвижной оси?
13. Сформулируйте принцип Даламбера — Лагранжа.
14. Как получить уравнение движения системы с одной степенью свободы?
15. Как определить реакции связей после получения уравнения движения?

Тема 4 Уравнения Лагранжа второго рода

16. Как выразить кинетическую энергию через обобщённые скорости?
17. Запишите уравнения Лагранжа с обобщёнными силами в правой части.
18. Как определяется функция Лагранжа консервативной системы?
19. Какова последовательность составления уравнений для системы с двумя степенями свободы?
20. Каков физический смысл матрицы инерции и её недиагональных элементов?

Тема 5 Сопротивление и первые интегралы

21. Как включаются внешние силы и приводные моменты в уравнения Лагранжа?
22. Как диссипативная функция Рэлея связана с силами вязкого сопротивления?
23. Какая координата называется циклической и когда сохраняется соответствующий импульс?
24. При каких условиях существует интеграл энергии и когда он равен полной механической энергии?
25. Как записывается энергетический баланс при сопротивлении и внешнем воздействии?

Тема 6 Принцип Гамильтона — Остроградского

26. Как определяется действие механической системы?
27. Что понимается под вариацией траектории и какие условия задаются на концах интервала?
28. Сформулируйте принцип стационарного действия для консервативной голономной системы.
29. Как получить уравнения Лагранжа из первой вариации действия?
30. Почему стационарность не означает минимум? Как учитывается виртуальная работа непотенциальных сил?

Тема 7 Канонические и численные методы

31. Как определяются обобщённые импульсы и условие обратимости перехода от скоростей?
32. Как строится функция Гамильтона преобразованием Лежандра?
33. Запишите канонические уравнения и объясните их связь с уравнениями Лагранжа.
34. Как привести уравнения движения к системе первого порядка?
35. Как интерпретировать фазовую траекторию и проверить точность численного решения?

Тема 8 Равновесие и устойчивость

36. Как определяются положения равновесия консервативной системы?
37. Что означает устойчивость равновесия относительно малых возмущений?
38. Сформулируйте теорему Лагранжа — Дирихле.
39. Как используются матрица вторых производных и критерий положительной определённости?
40. Почему вырожденная квадратичная форма требует дополнительного исследования?

Тема 9 Малые колебания

41. Какие допущения принимаются при линеаризации около равновесия?
42. Как строятся матрицы масс и жёсткости?
43. Как выводится частотное уравнение и определяются формы колебаний?
44. В каком смысле формы ортогональны и как вводятся нормальные координаты?
45. Как учитываются начальные условия, вязкое сопротивление и гармоническая внешняя сила?

4 Тестовые задания

В каждом задании выбрать один правильный ответ. Время — 25 минут. Каждый верный ответ — 0,5 балла; неверный или отсутствующий — 0. Максимум — 10 баллов. Формулы и конспект не используются. Ключ размещён в разделе 8.

Тест 1

Голономной является связь, которую можно представить в виде:

А. Неинтегрируемого соотношения только между скоростями

Б. Уравнения f(q,t)=0

В. Любого уравнения движения

Г. Только неравенства энергии

Тест 2

Две независимые материальные точки в пространстве имеют одну независимую двустороннюю геометрическую связь. Число степеней свободы равно:

А. 6
Б. 4
В. 5
Г. 3
Тест 3
Возможное перемещение рассматривается:
А. При фиксированном времени и с учётом связей
Б. Только за конечный интервал времени
В. Только вдоль действительной траектории
Г. Без учёта связей
Тест 4
Связи являются идеальными, если:
А. Все реакции равны нулю
Б. Их реакции всегда перпендикулярны скоростям
В. Система неподвижна
Г. Суммарная работа реакций на любом допустимом возможном перемещении равна нулю
Тест 5
Для потенциальных сил обобщённая сила Q_i равна:
А. $\partial П/\partial q_i$
Б. $-\partial П/\partial q_i$
В. $\partial T/\partial q_i$
Г. $-Пq_i$
Тест 6
Если координата — угол в радианах, соответствующая обобщённая сила имеет размерность:
А. Н
Б. кг
В. Н·м
Г. Н/м
Тест 7
Сила инерции материальной точки в принципе Даламбера равна:
А. $-ma$
Б. ma
В. mv
Г. $-mv$
Тест 8
Уравнение Лагранжа с обобщёнными силами записывается:
А. $d(\partial T/\partial q_i)/dt - \partial T/\partial \dot{q}_i = Q_i$
Б. $\partial T/\partial \dot{q}_i = Q_i$
В. $dT/dt = Q_i$
Г. $d(\partial T/\partial \dot{q}_i)/dt - \partial T/\partial q_i = Q_i$
Тест 9
Функция Лагранжа обычной консервативной механической системы равна:
А. Т+П
Б. Т−П
В. П−Т
Г. ТП
Тест 10
Для линейного вязкого сопротивления с коэффициентом с диссипативная функция равна:
А. cx
Б. $c\,\dot{x}$
В. $c\,\dot{x}^2/2$
Г. $c\,x^2/2$
Тест 11
При отсутствии соответствующей непотенциальной силы для циклической координаты сохраняется:
А. Обобщённый импульс
Б. Обобщённая скорость обязательно
В. Координата
Г. Потенциальная энергия отдельно
Тест 12
Для свободной системы $m\,\ddot{x}+c\,\dot{x}+kx=0$ при $c>0$ производная полной энергии равна:
А. $c\,\dot{x}^2$
Б. 0 всегда
В. $-kx^2$
Г. $-c\,\dot{x}^2$
Тест 13
Действие определяется выражением:
А. $\int(T+П)dt$
Б. $\int Ldt$

В. $\int q dt$
Г. dL/dt
Тест 14
Стационарность действия означает:
А. Обязательный глобальный минимум
Б. Нулевую скорость
В. Нулевую первую вариацию для допустимых вариаций
Г. Нулевую энергию
Тест 15
Обобщённый импульс определяется как:
А. $\partial L/\partial \dot{q}_i$
Б. $\partial L/\partial q_i$
В. $\partial П/\partial q_i$
Г. dq_i/dt
Тест 16
Канонические уравнения имеют вид:
А. $\dot{q}_i=-\partial H/\partial p_i$; $\dot{p}_i=\partial H/\partial q_i$
Б. $\dot{q}_i=\partial H/\partial q_i$; $\dot{p}_i=\partial H/\partial p_i$
В. $\dot{q}_i=\dot{p}_i=H$
Г. $\dot{q}_i=\partial H/\partial p_i$; $\dot{p}_i=-\partial H/\partial q_i$
Тест 17
Достаточное условие устойчивости по Лагранжу — Дирихле — это:
А. Любая стационарная точка П
Б. Строгий локальный минимум П при стандартных предпосылках теоремы
В. Максимум П
Г. Только нулевая первая производная
Тест 18
Если $П''(q_0)=0$, то:
А. Равновесие всегда неустойчиво
Б. Равновесие всегда устойчиво
В. Требуется дополнительное исследование
Г. Положение q_0 не может быть равновесием
Тест 19
Частотное уравнение консервативной линейной системы имеет вид:
А. $\det(K-\omega^2 M)=0$
Б. $\det(K+\omega M)=0$
В. $M+K=0$
Г. $\det(M)=0$
Тест 20
При различных собственных частотах формы симметричной консервативной системы ортогональны:
А. Только по обычному скалярному произведению при любой M
Б. Только при равных частотах
В. Только при наличии трения
Г. Относительно матрицы масс

5 Расчётные задания и контрольные работы
Практические задания П1–П9 соответствуют девяти двухчасовым занятиям. На занятии оценивается модель, расчёт и короткая защита результата. Развёрнутые численные исследования завершаются в рамках самостоятельной работы. Принять $g=9{,}81$ м/с², если не указано иное.
П1 Связи двойного маятника
Двойной плоский маятник: невесомые стержни длиной l_1 и l_2, массы m_1 в промежуточном шарнире и m_2 на конце второго стержня; верхний шарнир неподвижен. Шарниры идеальны. Определить связи и число степеней свободы. Выбрать углы от нижней вертикали, выразить координаты, скорости и возможные перемещения обеих масс.
П2 Равновесие рычага
Невесомый горизонтальный рычаг вращается вокруг неподвижного шарнира. На расстоянии $a=0{,}20$ м слева действует вертикальная сила $F=100$ Н вниз. На расстоянии $b=0{,}50$ м справа действует сила P вниз. Определить P методом возможных перемещений; проверить уравнением моментов.
П3 Динамика грузов и блока
Грузы $m_1=3$ кг и $m_2=5$ кг связаны невесомой нерастяжимой нитью через блок $R=0{,}10$ м, $J=0{,}02$ кг·м². Проскальзывания нет, трение в оси отсутствует. Координата q направлена вниз для m_2. Получить уравнение по принципу Даламбера — Лагранжа, найти ускорение и натяжения нити.
П4 Модель двухмассовой системы
Массы m_1 и m_2 движутся горизонтально без трения. Между левой опорой и m_1 — пружина k_1, между массами — k_2, между m_2 и правой опорой — k_3. Перемещения x_1, x_2 направлены вправо и отсчитываются от равновесия. Записать T, П, уравнения Лагранжа, матрицы M и K.
П5 Свободное движение с сопротивлением
Система масса — пружина — демпфер: $m=2$ кг, $k=50$ Н/м, $c=4$ Н·с/м; внешняя сила отсутствует. Получить диссипативную функцию и уравнение движения, определить характер движения и производную энергии. При $x(0)=0{,}10$ м, $\dot{x}(0)=0$ получить

x(t).

П6 Вариационный вывод

Математический маятник: масса m, длина l, угол φ от нижней вертикали. Записать L и действие S. При $\delta\varphi(t_0)=\delta\varphi(t_1)=0$ вычислить δS, вывести нелинейное уравнение движения и его линейное приближение.

П7 Каноническая модель осциллятора

m=1 кг, k=25 Н/м. Найти импульс p, функцию H и канонические уравнения. При x(0)=0,10 м, $\dot{x}(0)=0$ получить аналитическое решение. Подготовить систему первого порядка для численного расчёта; объяснить форму траектории на плоскости (x,p).

П8 Устойчивость при изменении параметра

$\Pi(q)=a\,q^2/2+b\,q^4/4$, b>0; $T=m\,\dot{q}^2/2$, m>0. Найти равновесия и исследовать их устойчивость при a>0, a=0 и a<0. Для вырожденного случая использовать полное выражение П.

П9 Модальный анализ

Для системы П4 принять $m_1=m_2=2$ кг, $k_1=k_2=k_3=200$ Н/м. Найти частоты, формы и проверить их ортогональность по M. Определить движение при $x_1(0)=0{,}01$ м, $x_2(0)=0$ и нулевых начальных скоростях.

5.1 Контрольная работа 1

Темы 1–4. Время — 60 минут. Две задачи, максимум 10 баллов. Допускается непрограммируемый калькулятор; конспект и готовые решения не используются.

Вариант 1

1. Для рычага по схеме П2 принять a=0.25 м, b=0.4 м, F=80 Н. Определить обобщённую силу, найти P из принципа возможных перемещений и проверить уравнением моментов.
2. Для системы грузов и блока по схеме П3 принять $m_1=2$ кг, $m_2=4$ кг, R=0.1 м, J=0.01 кг·м². Указать связи и координату, записать энергии, вывести уравнение Лагранжа и определить ускорение.

Вариант 2

1. Для рычага по схеме П2 принять a=0.3 м, b=0.5 м, F=120 Н. Определить обобщённую силу, найти P из принципа возможных перемещений и проверить уравнением моментов.
2. Для системы грузов и блока по схеме П3 принять $m_1=4$ кг, $m_2=6$ кг, R=0.2 м, J=0.08 кг·м². Указать связи и координату, записать энергии, вывести уравнение Лагранжа и определить ускорение.

5.2 Контрольная работа 2

Темы 5–9. Время — 60 минут. Две задачи, максимум 10 баллов. Условия использования материалов те же, что для КР1.

Вариант 1

1. Система масса — пружина — демпфер: m=1 кг, k=100 Н/м, c=2 Н·с/м. Найти диссипативную функцию, уравнение движения, характер движения, затухающую частоту и производную энергии.
2. Для схемы П4 с одинаковыми массами m=1 кг и одинаковыми пружинами k=100 Н/м получить M и K, частотное уравнение, частоты и формы. Объяснить движения масс в каждой форме.

Вариант 2

1. Система масса — пружина — демпфер: m=2 кг, k=32 Н/м, c=4 Н·с/м. Найти диссипативную функцию, уравнение движения, характер движения, затухающую частоту и производную энергии.
2. Для схемы П4 с одинаковыми массами m=2 кг и одинаковыми пружинами k=50 Н/м получить M и K, частотное уравнение, частоты и формы. Объяснить движения масс в каждой форме.

5.3 Анализ ошибок

1. Студент записал $Q_i=\partial\Pi/\partial q_i$. Исправить выражение и проверить знак силы на примере растянутой пружины.
2. В энергии системы П4 отсутствует член $k_2(x_2-x_1)^2/2$. Объяснить, какие физические взаимодействия потеряны и как исправить модель.
3. Получено $dE/dt=+c\,\dot{x}^2$ для свободной системы с пассивным демпфером. Найти ошибку по энергетическому балансу.
4. На основании $\Pi''(q_0)=0$ сделан вывод о неустойчивости. Показать недостаточность такого вывода на примере $\Pi=bq^4/4$, b>0.
5. Для разных собственных частот проверено только $u_1^{T}u_2=0$ при неодинаковых массах. Указать правильную проверку ортогональности.

6 Индивидуальное компьютерное задание

Тема — численное исследование нелинейного маятника с вязким сопротивлением. Выполняется в MATLAB или Python в рамках 40 часов самостоятельной работы; отдельные лабораторные часы не назначаются. Максимум — 12 баллов.

Исходная модель: $m\,l^2\,\ddot{\varphi} + c\varphi\,\dot{\varphi} + mgl\sin\varphi = 0$. Здесь cφ — коэффициент вращательного вязкого сопротивления, Н·м·с/рад. Длина и масса указаны в таблице; $\dot{\varphi}(0)=0$. Для каждого варианта рассмотреть cφ=0 и ненулевое значение cφ из таблицы.

Вариант	m, кг	l, м	φ(0), рад	cφ, Н·м·с/рад
1	1	1	0.2	0.1
2	2	0.8	0.5	0.15
3	1.5	1.2	1	0.2

1. Вывести уравнение Лагранжа и записать систему $\dot{\varphi}=v$; $\dot{v}=-(g/l)\sin\varphi-c\varphi\,v/(ml^2)$.
2. Выполнить расчёт на интервале 0–20 с. Указать метод, начальные условия, допуски либо шаг интегрирования.
3. Построить φ(t), $\dot{\varphi}(t)$, фазовую траекторию и E(t), где $E=ml^2\dot{\varphi}^2/2+mgl(1-\cos\varphi)$.
4. Для cφ=0 оценить максимальный относительный дрейф энергии $|E(t)-E(0)|/E(0)$. Повторить расчёт с более строгими допусками или меньшим шагом.
5. Для cφ>0 проверить интегральный баланс $E(t)-E(0)+\int_0^t c\varphi\,\dot{\varphi}^2 d\tau=0$; оценить максимальный нормированный невязочный остаток.
6. Сравнить нелинейную модель с линейной заменой $\sin\varphi\approx\varphi$. Объяснить влияние начального угла и сопротивления.
7. Представить краткий отчёт с уравнениями, параметрами, графиками, проверками и выводами; приложить исходный код или воспроизводимый файл расчёта.

Единого порога ошибки для всех методов не назначается. Оценивается обоснованная проверка сходимости и объяснение достигнутой точности. При защите студент объясняет знаки членов, размерность cφ, баланс энергии и расхождение линейной и нелинейной моделей.

7 Промежуточная аттестация

Предлагаемый формат — экзамен: 40 минут подготовки, затем объяснение решения и ответы на уточняющие вопросы. Билет включает два теоретических вопроса по разным разделам и одну расчётную задачу. Допускается непрограммируемый калькулятор. Компьютерное исследование оценивается ранее, как текущая работа.

7.1 Банк теоретических вопросов

1. Классификация связей, число степеней свободы и выбор обобщённых координат.
2. Возможные перемещения, идеальные связи и обобщённые силы.
3. Принцип возможных перемещений и условия равновесия.
4. Принцип Даламбера и приведение сил инерции при простых движениях тела.
5. Принцип Даламбера — Лагранжа и общее уравнение динамики.
6. Кинетическая энергия в обобщённых координатах и матрица инерции.
7. Вывод и применение уравнений Лагранжа второго рода.
8. Функция Лагранжа и моделирование системы с двумя степенями свободы.
9. Внешние воздействия и диссипативная функция Рэлея.
10. Циклические координаты и сохранение обобщённых импульсов.
11. Энергетическая функция, интеграл энергии и энергетический баланс.
12. Принцип Гамильтона — Остроградского и вывод уравнений движения.
13. Обобщённые импульсы, преобразование Лежандра и функция Гамильтона.
14. Канонические уравнения и их эквивалентность уравнениям Лагранжа.
15. Фазовая плоскость; численное решение и контроль точности.
16. Равновесие и теорема Лагранжа — Дирихле.
17. Вторая вариация потенциальной энергии и вырожденные случаи.
18. Линеаризация и матричные уравнения малых колебаний.
19. Частотное уравнение, собственные частоты и формы.
20. Ортогональность форм, нормальные координаты и начальные условия.
21. Свободные колебания с вязким сопротивлением.
22. Гармоническое воздействие, установившееся движение и резонанс.

7.2 Экзаменационные задачи

Э1 Равновесие маятника

Точечная масса m=2 кг на невесомом стержне l=0,50 м подвешена на неподвижном шарнире. Постоянная горизонтальная сила F=10 Н направлена вправо. Угол φ от нижней вертикали положителен вправо. Найти обобщённую силу, все положения равновесия и их устойчивость. Использовать возможную работу и потенциальную энергию.

Э2 Движение грузов

Схема П3: m_1=2 кг, m_2=4 кг, R=0,10 м, J=0,01 кг·м². Получить уравнение Лагранжа, ускорение грузов и натяжения нити. Объяснить различие натяжений.

Э3 Канонические уравнения маятника

Для математического маятника m=1 кг, l=1 м построить L, обобщённый импульс, H и канонические уравнения. Показать эквивалентность нелинейному уравнению Лагранжа и найти частоту малых колебаний.

Э4 Устойчивость двухкоординатной системы

$T=m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)/2$, m=1 кг; $П=k(x^2+y^2)/2+\alpha xy$, k=100 Н/м. Исследовать равновесие в начале координат при α=60, 100 и 120 Н/м. Для каждого случая различить строгий минимум, вырожденный минимум и седловую точку; установить динамическую устойчивость относительно возмущений координат и скоростей.

Э5 Модальный анализ

Схема П4: $m_1=m_2$=1 кг, $k_1=k_2=k_3$=100 Н/м. Получить уравнения, частоты и формы. Найти движение при $x_1(0)$=0,02 м, $x_2(0)$=0 и нулевых начальных скоростях.

Э6 Вынужденные колебания

$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=F_0\cos\Omega t$; m=1 кг, k=100 Н/м, c=2 Н·с/м, F_0=10 Н. Вывести амплитуду и фазовый сдвиг установившегося движения. Найти частоту максимума амплитуды перемещения и его значение; вычислить амплитуду при Ω=10 рад/с.

7.3 Комплект экзаменационных билетов

Формулировки вопросов берутся из пункта 7.1, полные условия задач — из пункта 7.2. Таблица задаёт двенадцать готовых сочетаний; при выдаче студенту билет должен содержать полные тексты, а не только номера.

Билет 1

1. Классификация связей, число степеней свободы и выбор обобщённых координат.
2. Равновесие и теорема Лагранжа — Дирихле.
3. Для математического маятника m=1 кг, l=1 м построить L, обобщённый импульс, H и канонические уравнения. Показать эквивалентность нелинейному уравнению Лагранжа и найти частоту малых колебаний.

Билет 2

1. Возможные перемещения, идеальные связи и обобщённые силы.
2. Частотное уравнение, собственные частоты и формы.
3. Схема П3: m_1=2 кг, m_2=4 кг, R=0,10 м, J=0,01 кг·м². Получить уравнение Лагранжа, ускорение грузов и натяжения нити. Объяснить различие натяжений.

Билет 3

1. Принцип возможных перемещений и условия равновесия.
2. Обобщённые импульсы, преобразование Лежандра и функция Гамильтона.

3. Схема П4: $m_1=m_2=1$ кг, $k_1=k_2=k_3=100$ Н/м. Получить уравнения, частоты и формы. Найти движение при $x_1(0)=0{,}02$ м, $x_2(0)=0$ и нулевых начальных скоростях.

Билет 4

1. Принцип Даламбера и приведение сил инерции при простых движениях тела.
2. Ортогональность форм, нормальные координаты и начальные условия.
3. Точечная масса m=2 кг на невесомом стержне l=0,50 м подвешена на неподвижном шарнире. Постоянная горизонтальная сила F=10 Н направлена вправо. Угол φ от нижней вертикали положителен вправо. Найти обобщённую силу, все положения равновесия и их устойчивость. Использовать возможную работу и потенциальную энергию.

Билет 5

1. Принцип Даламбера — Лагранжа и общее уравнение динамики.
2. Вторая вариация потенциальной энергии и вырожденные случаи.
3. $m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=F_0\cos\Omega t$; m=1 кг, k=100 Н/м, c=2 Н·с/м, F_0=10 Н. Вывести амплитуду и фазовый сдвиг установившегося движения. Найти частоту максимума амплитуды перемещения и его значение; вычислить амплитуду при Ω=10 рад/с.

Билет 6

1. Кинетическая энергия в обобщённых координатах и матрица инерции.
2. Принцип Гамильтона — Остроградского и вывод уравнений движения.
3. $T=m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)/2$, m=1 кг; $\Pi=k(x^2+y^2)/2+\alpha xy$, k=100 Н/м. Исследовать равновесие в начале координат при α=60, 100 и 120 Н/м. Для каждого случая различить строгий минимум, вырожденный минимум и седловую точку; установить динамическую устойчивость относительно возмущений координат и скоростей.

Билет 7

1. Вывод и применение уравнений Лагранжа второго рода.
2. Свободные колебания с вязким сопротивлением.
3. Точечная масса m=2 кг на невесомом стержне l=0,50 м подвешена на неподвижном шарнире. Постоянная горизонтальная сила F=10 Н направлена вправо. Угол φ от нижней вертикали положителен вправо. Найти обобщённую силу, все положения равновесия и их устойчивость. Использовать возможную работу и потенциальную энергию.

Билет 8

1. Функция Лагранжа и моделирование системы с двумя степенями свободы.
2. Канонические уравнения и их эквивалентность уравнениям Лагранжа.
3. Схема П3: $m_1=2$ кг, $m_2=4$ кг, R=0,10 м, $J=0{,}01$ кг·м². Получить уравнение Лагранжа, ускорение грузов и натяжения нити. Объяснить различие натяжений.

Билет 9

1. Внешние воздействия и диссипативная функция Рэлея.
2. Линеаризация и матричные уравнения малых колебаний.
3. Для математического маятника m=1 кг, l=1 м построить L, обобщённый импульс, H и канонические уравнения. Показать эквивалентность нелинейному уравнению Лагранжа и найти частоту малых колебаний.

Билет 10

1. Циклические координаты и сохранение обобщённых импульсов.
2. Гармоническое воздействие, установившееся движение и резонанс.
3. $T=m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)/2$, m=1 кг; $\Pi=k(x^2+y^2)/2+\alpha xy$, k=100 Н/м. Исследовать равновесие в начале координат при α=60, 100 и 120 Н/м. Для каждого случая различить строгий минимум, вырожденный минимум и седловую точку; установить динамическую устойчивость относительно возмущений координат и скоростей.

Билет 11

1. Энергетическая функция, интеграл энергии и энергетический баланс.
2. Частотное уравнение, собственные частоты и формы.
3. Схема П4: $m_1=m_2=1$ кг, $k_1=k_2=k_3=100$ Н/м. Получить уравнения, частоты и формы. Найти движение при $x_1(0)=0{,}02$ м, $x_2(0)=0$ и нулевых начальных скоростях.

Билет 12

1. Принцип Гамильтона — Остроградского и вывод уравнений движения.
2. Фазовая плоскость; численное решение и контроль точности.
3. $m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=F_0\cos\Omega t$; m=1 кг, k=100 Н/м, c=2 Н·с/м, F_0=10 Н. Вывести амплитуду и фазовый сдвиг установившегося движения. Найти частоту максимума амплитуды перемещения и его значение; вычислить амплитуду при Ω=10 рад/с.

5.4. Перечень видов оценочных средств

Для текущего контроля целесообразно использовать устный опрос, тесты, расчётные задания, две контрольные работы и защиту индивидуального задания. Компьютерный расчёт можно включить в индивидуальное задание как отдельный этап. Для промежуточной аттестации предлагаются экзаменационные билеты с теоретическими вопросами и расчётной задачей;

6. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

6.1. Рекомендуемая литература

6.1.1. Основная литература

	Авторы, составители	Заглавие	Издательство, год

	Авторы, составители	Заглавие	Издательство, год
Л1.1	Еремьянц В.Э., Рудаев Я.И., Тютюкин Г.В.	Аналитическая динамика и теория колебаний. Ч. 1.: учебное пособие	Бишкек 2014
Л1.2	Еремьянц В.Э., Рудаев Я.И., Тютюкин Г.В.	Аналитическая динамика и теория колебаний. Ч. 2.: учебное пособие	Бишкек: Изд-во КРСУ 2014

6.1.2. Дополнительная литература

	Авторы, составители	Заглавие	Издательство, год
Л2.1	Бабаков И.М.	Теория колебаний: учебное пособие	М.: Дрофа 2004

6.3. Перечень информационных и образовательных технологий

6.3.1 Компетентностно-ориентированные образовательные технологии

6.3.1.1	MATLAB, при наличии — Symbolic Math Toolbox — численное решение уравнений движения, символьные преобразования, исследование механических систем. MATLAB
6.3.1.2	Python с библиотеками NumPy, SciPy, SymPy и Matplotlib — составление уравнений Лагранжа, численное интегрирование, обработка и визуализация результатов расчётов. SymPy 1.14.0 documentation
6.3.1.3	GNU Octave — свободное программное обеспечение для матричных вычислений и построения графиков; подходит для расчётных задач по механике. octave.org
6.3.1.4	LibreOffice (Writer, Calc, Math) — оформление расчётных работ, обработка табличных данных и запись математических формул.

6.3.2 Перечень информационных справочных систем и программного обеспечения

6.3.2.1	Профессиональные базы данных
6.3.2.2	1. eLIBRARY.RU — научная электронная библиотека для поиска публикаций по теоретической и прикладной механике, динамике и колебаниям механических систем. elibrary.ru
6.3.2.3	2. Math-Net.Ru — общероссийский математический портал для поиска научных публикаций по математическим методам механики и дифференциальным уравнениям. mathnet.ru
6.3.2.4	3. КиберЛенинка — научная электронная библиотека открытого доступа для подбора статей по тематике дисциплины. cyberleninka.ru
6.3.2.5	Информационные справочные системы
6.3.2.6	1. NIST Digital Library of Mathematical Functions — математический справочник по специальным функциям, численным методам и другим средствам решения задач аналитической механики. dlmf.nist.gov
6.3.2.7	2. Справочная система MATLAB — документация по решению дифференциальных уравнений и выполнению символьных вычислений. MATLAB & Simulink
6.3.2.8	3. Документация SymPy Mechanics — справочные и учебные материалы по построению моделей механических систем и выводу уравнений движения.

7. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

8. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ «АНАЛИТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА»

1. Общие рекомендации

Освоение дисциплины «Аналитическая механика» предполагает последовательное изучение общих принципов механики, методов составления уравнений движения, исследования равновесия и малых колебаний механических систем. Учебная работа включает посещение лекций, выполнение практических и самостоятельных работ, подготовку к текущему контролю и промежуточной аттестации.

При изучении дисциплины необходимо опираться на знания математического анализа, линейной алгебры, дифференциальных уравнений и теоретической механики. Особое внимание следует уделить дифференцированию функций нескольких переменных, решению обыкновенных дифференциальных уравнений, работе с матрицами и определению собственных значений.

Изучать материал рекомендуется в последовательности: связи и обобщённые координаты; возможные перемещения и обобщённые силы; общие принципы динамики; уравнения Лагранжа; вариационные и канонические методы; устойчивость равновесия и малые колебания. Каждый следующий раздел использует понятия и методы предыдущих разделов.

2. Подготовка к лекциям и работа с лекционным материалом

Перед лекцией следует ознакомиться с её темой, повторить основные понятия предыдущего занятия и необходимые математические сведения. Если изучаемая тема связана с конкретной механической системой, полезно предварительно представить её расчётную схему и возможные способы описания движения.

Во время лекции рекомендуется фиксировать:

- определения и условия применимости рассматриваемого метода;
- принятые обозначения, направления координат и допущения;
- основные этапы вывода уравнений;

- физический смысл полученных соотношений;
- примеры применения и способы проверки результатов.

При конспектировании вывода формул необходимо сохранять последовательность рассуждений. Следует различать исходные физические положения, математические преобразования и окончательный результат.

После лекции необходимо просмотреть конспект, восстановить пропущенные этапы вывода, сверить обозначения и ответить на контрольные вопросы по теме. Непонятные положения следует сформулировать в виде конкретных вопросов для обсуждения с преподавателем.

3. Подготовка к практическим занятиям

До практического занятия необходимо изучить соответствующий лекционный материал, повторить основные формулы и ознакомиться с условиями заданий. Рекомендуется самостоятельно выполнить начальные этапы решения: построить схему, определить связи и выбрать координаты.

При решении задач следует придерживаться следующей последовательности:

1. Проанализировать условие и выделить существенные физические особенности системы.
2. Построить расчётную схему, обозначить силы, геометрические параметры и направления движения.
3. Классифицировать связи, определить число степеней свободы и выбрать независимые обобщённые координаты.
4. Сформулировать допущения: отсутствие трения, невесомость элементов, нерастяжимость нити, малость перемещений и другие условия.
5. Выразить положения и скорости точек через выбранные координаты.
6. Определить необходимые энергии, обобщённые силы и характеристики сопротивления.
7. Составить уравнения выбранным методом и выполнить их решение.
8. Проверить размерности, знаки, начальные условия и физическую допустимость результата.
9. Сформулировать вывод, отвечающий на вопрос задачи.

Каждый этап должен сопровождаться кратким пояснением. Если численные параметры не заданы, решение представляется в общем виде.

4. Рекомендации по изучению основных разделов

Связи и обобщённые координаты. Следует научиться определять независимые параметры системы и выражать через них положения всех её элементов. Необходимо различать возможные и действительные перемещения, учитывать независимость связей и обосновывать их идеальность.

Принцип возможных перемещений. Основное внимание следует уделить составлению выражения возможной работы. Знаки отдельных слагаемых определяются согласованными направлениями сил и перемещений. Для проверки условий равновесия рекомендуется использовать уравнения моментов или производные потенциальной энергии.

Принцип Даламбера — Лагранжа. Необходимо правильно учитывать инерцию материальных точек и твёрдых тел. Полученное уравнение движения следует сопоставлять с физическим направлением ускорения и, по возможности, проверять методом Ньютона — Эйлера.

Уравнения Лагранжа. Следует тщательно составлять выражения кинетической и потенциальной энергий. При дифференцировании важно различать частную производную по координате, частную производную по скорости и полную производную по времени. Для связанных систем необходимо учитывать взаимодействие между степенями свободы.

Неконсервативные силы и первые интегралы. Следует различать потенциальные силы, внешние воздействия и силы сопротивления. Перед использованием закона сохранения энергии необходимо проверить условия его применимости. При наличии сопротивления рекомендуется составлять энергетический баланс.

Вариационные и канонические методы. Необходимо понимать смысл вариации траектории, условия на концах временного интервала и отличие стационарности действия от его минимума. При переходе к каноническим уравнениям следует явно определить обобщённые импульсы и выразить скорости через них.

Устойчивость равновесия. После нахождения стационарных точек потенциальной энергии следует исследовать характер каждой точки. Нулевая вторая производная или вырожденная матрица вторых производных требуют дополнительного анализа.

Малые колебания. Следует отделять исходную нелинейную модель от её линейного приближения. Необходимо понимать физический смысл матриц масс и жёсткости, собственных частот и форм колебаний, а также учитывать начальные условия при восстановлении движения.

5. Организация самостоятельной работы

Самостоятельная работа объёмом 40 академических часов выполняется регулярно в течение семестра. Она включает проработку лекций, решение расчётных задач, выполнение индивидуального задания и подготовку к контрольным мероприятиям.

Для каждой темы рекомендуется:

- составить краткий перечень основных понятий и соотношений;
- самостоятельно воспроизвести ключевой вывод;
- решить задачу, отличающуюся от разобранного примера;
- проверить результат независимым способом;
- отметить затруднения и обсудить их на консультации.

При работе с учебной литературой необходимо сопоставлять обозначения разных авторов с обозначениями, принятыми на занятиях. Формулу следует использовать только после выяснения её условий применимости.

Ошибки, выявленные при проверке работ, рекомендуется фиксировать вместе с их причинами и исправлениями. Это помогает избежать повторения ошибок при последующих расчётах.

6. Выполнение компьютерных расчётов

Для численного исследования механических систем могут использоваться MATLAB или Python с доступными средствами решения дифференциальных уравнений и линейной алгебры.

Компьютерный расчёт следует начинать с самостоятельного вывода математической модели. До запуска программы необходимо проверить уравнения, единицы измерения, значения параметров и начальные условия.

В ходе расчёта необходимо:
1. Записать систему уравнений в форме, соответствующей выбранному численному методу.
2. Указать временной интервал, шаг или допуски интегрирования.
3. Проверить результат на простом случае, для которого известно аналитическое решение.
4. Повторить расчёт с меньшим шагом или более строгими допусками.
5. Проверить сохранение энергии либо энергетический баланс с учётом сопротивления.
6. Объяснить особенности полученных графиков и фазовых траекторий.
Графики должны содержать подписи осей, единицы измерения и обозначения отображаемых величин. При сравнении нескольких решений необходимо указать параметры каждого из них.
7. Оформление и защита выполненных работ
Расчётная работа должна содержать условие, исходные данные, схему, обозначения, допущения, последовательное решение и итоговый вывод. Численные результаты приводятся с единицами измерения и обоснованной точностью.
Для компьютерной работы дополнительно представляются описание метода, исходный код или воспроизводимый файл расчёта, графики и результаты проверки точности.
На защите обучающийся должен уметь объяснить выбор координат, происхождение членов уравнений, принятые допущения и физический смысл результатов. Следует быть готовым показать, как изменится поведение системы при изменении массы, жёсткости, сопротивления или начальных условий.
Использование программных средств и средств искусственного интеллекта допускается в пределах требований преподавателя. Полученные с их помощью формулы, расчёты и пояснения необходимо самостоятельно проверить. Обучающийся должен понимать и обосновывать представленное решение.
8. Подготовка к текущему контролю и промежуточной аттестации
При подготовке к текущему контролю следует повторить определения, условия применимости принципов и типовые способы решения задач по проверяемым темам. Подготовка к контрольной работе должна включать самостоятельное решение задач без обращения к готовому образцу.
К промежуточной аттестации рекомендуется составить перечень основных методов и указать для каждого:
- какие системы он позволяет исследовать;
- какие исходные величины необходимы;
- какова последовательность применения;
- какие ограничения следует учитывать;
- каким способом проверяется результат.
При ответе на теоретический вопрос необходимо последовательно раскрыть понятия, сформулировать условия применимости, привести основные соотношения и объяснить их физический смысл.
При решении экзаменационной задачи следует представить расчётную схему, обосновать выбор метода, показать основные этапы вывода и проверить результат. Форму аттестации, разрешённые материалы и порядок оценивания необходимо уточнить по утверждённой рабочей программе дисциплины и требованиям преподавателя.